Diferenciál – další příklady:

1. Je dána funkce $f(x,y) = \log\left(\sqrt{y+1} - x\right)$.
   a) Najděte definiční obor D funkce g a nakreslete jej.
   b) Vypočítejte gradient $\nabla f(0,0)$.
   c) Ukažte, že funkce f má v bodě $[0,0]$ totální diferenciál a určete jej. Napište rovnici tečné roviny v bodě $[0,0,0]$.
   d) Vypočítejte přibližně pomocí lineární aproximace $f(-0{,}04;\ 0{,}02)$.
2. Ukažte, že funkce $f(x,y) = \sqrt{|x.y|}$ není diferencovatelná v bodě $(0,0)$ (i když je v bodě $(0,0)$ spojitá a má zde obě parciální derivace) .
3. a) Ukažte, že funkce $f(x,y,z) = \left(x^2 + e^y, x + y.\sin z\right)$ má totální diferenciál v bodě $(1,1,0)$ a napište totální diferenciál v tomto bodě.

   b) Najděte Jacobiho matici a totální diferenciál (všude, kde existuje) funkcí :
   i) $f(r,\varphi) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$; ii) $f(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$;
   iii) $f(r,\varphi,z) = (r\sin\vartheta\cos\varphi,\ r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$;
   iv) $f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

Derivace ve směru:

1. Zopakujte si odvození derivace funkce f v bodě (x,y) ve směru $\vec{a} = (a_1, a_2)$, tj. $g'(0)$, je-li $g(t) = f(x + a_1 t, y + a_2 t)$, má-li f totální diferenciál v bodě (x,y) a $\vec{a} = (a_1, a_2)$.
   Pokuste o totéž, je-li f funkce n proměnných ($n \geq 3$) .
2. Určete derivaci funkce $f(x,y) = \log(x+y)$ v bodě $(1,2)$, ležícím na parabole $y^2 = 4x$, ve směru jednotkového vektoru, tečného k parabole v tomto bodě.
3. Zjistěte, zda funkce $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ je v bodě $(1,1)$ ve směru vektoru $\vec{a} = (2,1)$ rostoucí nebo klesající. Najděte vektor, v jehož směru funkce f v bodě $(1,1)$ roste nejrychleji.
4. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $X_0 \in R^n$ a $\nabla f(X_0) \neq \vec{0}$, pak vektor $\nabla f(X_0)$ udává směr nejrychlejšího růstu funkce f v bodě X_0.